第　1　問

実数 a, b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。
また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

第　2　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

第　3　問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

第　4　問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

第　5　問

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C: \quad y = x^2 + k$$
$$D: \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

第　6　問

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。